ETH Zürich FS 2020
D-INKF
Prof. J. Teichmann

Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 7

1. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

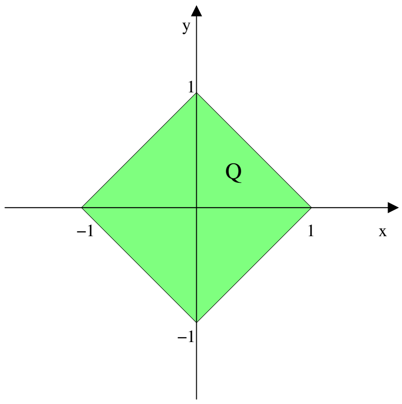
$$p(j,k) = P[X=j, Y=k] = \begin{cases} C\left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2,3,\dots \text{ und } j = 1,2,\dots,k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante C.

b) Berechnen Sie die Gewichtsfunktionen p_X und p_Y der Randverteilungen von X und Y.

c) Berechnen Sie die bedingte Gewichtsfunktion $p_{X|Y}(j\,|\,k) = P[X=j \mid Y=k]$ von X, gegeben dass $Y=k$, sowie die bedingte Gewichtsfunktion $p_{Y|X}(k\,|\,j) = P[Y=k \mid X=j]$ von Y, gegeben dass $X=j$.

2. Die gemeinsame Dichte $f(x,y)$ zweier Zufallsvariablen X, Y sei im Quadrat Q (vgl. Skizze) konstant und verschwinde ausserhalb von Q.



a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von (X,Y).

b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y.

c) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort mit einem mathematischen Argument!

d) Was ist die Antwort in **c)**, wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

3. Ein häufig benutztes Modell in der Rückversicherung zur Abdeckung grosser Schäden ist ein sogenannter "Excess-of-Loss" Vertrag. Gegen Bezahlung einer Prämie verpflichtet sich dabei die Rückversicherungsgesellschaft, allfällige Schäden, welche ein bestimmtes Level von x_0 CHF übersteigen, zu übernehmen.
Um die Höhe der Prämie zu bestimmen, untersucht die Gesellschaft die Grossschäden (Schäden $> x_0$) des letzten Jahres. In guter Näherung können solche Grossschäden durch eine *Pareto-verteilte* Zufallsvariable X modelliert werden, d.h. für einen Parameter $\alpha > 0$ ist die Verteilungsfunktion von X gegeben durch

$$F_X(x; x_0, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha}, & x \geq x_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie teuer ist ein einzelner Grossschaden im Mittel?

b) Die Netto-Jahresprämie berechnet sich durch $P_{net} = E[X]E[N]$. Dabei werde durch $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ die (zufällige) Anzahl der Grossschäden pro Jahr modelliert. Wie gross ist die Prämie P_{net} für $\alpha = 2,\ x_0 = 2 \cdot 10^6$ CHF und $\lambda = 3$?

c) Warum wird in obigem Modell in der Regel $\alpha > 1$ vorausgesetzt?

4. Bei den folgenden Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig.

a) Sie erhalten eine grosse Lieferung von 10 verschiedenen Materialien. Aus Erfahrung wissen wir, dass im Schnitt 5% der Materialien mangelhaft sind. Nehmen Sie an, dass die Materialien unabhängig voneinander sind. Dann gilt:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist
$$\binom{10}{2} 0.05^8 (1 - 0.05)^2.$$
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist
$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1 - 0.05)^8.$$
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Materialien mangelhaft sind, ist
$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1 - 0.05)^8.$$
4. Wenn wir 20 Materialien anschauen, gibt es darunter sicher eine mangelhafte.

b) Sei X die Anzahl der Einsen, die Sie in 10 unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel werfen. Welche Verteilung kommt für X in Frage?

1. Bernoulli verteilt mit Parameter $p = 1/6$.
2. Geometrisch verteilt mit Parameter $p = 1/6$.
3. Binomialverteilt mit Parameter $n = 10$ und $p = 1/6$.
4. Poisson verteilt mit Parameter $\lambda = 5/3$.

c) Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Dann gilt:

1. $P(X > 5) = 1 - P(X < 5)$.
2. $P(X \geq 1 | X \leq 1) = \lambda/(\lambda + 1)$.
3. $2X \sim \text{Poisson}(2\lambda)$.

d) Betrachte eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 3$. Dann gilt:

1. $P(X \leq 0) < P(X \geq 3)$.
2. Die Fläche unter der Dichte im Intervall $[1, 1 + \sqrt{3}]$ ist etwa 66%.
3. Die Fläche unter der Dichte im Intervall $[1 - 3, 1 + 3]$ ist etwa 66%.
4. Die Fläche unter der Dichte im Intervall $[1 - 2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}]$ ist etwa 95%.

e) Die stetige Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

1. Es ist $P(X = 0) = 0.5$.
2. Für $x \geq 0$ gilt $P(X > x) = \frac{\exp(-x)}{1 + \exp(-x)}$.
3. Die Dichte von X ist $\frac{-\exp(-x)}{(1 + \exp(-x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$.